

## 擾乱の外的スケールが小さい媒質中の光の伝搬

高遠徳尚\*, 山口一郎\*\*, 家 正則\*\*\*

### Wave Propagation Through a Turbulent Medium with a Small Outer Scale

Naruhsa TAKATO, Ichirou YAMAGUCHI, and Masanori IYE

A theory of wave propagation through a turbulent medium whose spectrum of refractive index fluctuation follows the von Kármán spectrum is described. Covariances of Zernike coefficients, which represent the distorted wavefronts, are calculated for various outer scales  $L_o$  and different turbulence strength.

#### 1. はじめに

天体などからの光が大気中を伝搬すると、大気の屈折率のゆらぎ（主に温度ゆらぎ）によって、その波面が乱される。現在、国立天文台ではハワイ・マウナケア山頂（高度 4200 m）に口径 8.2 m の可視・近赤外線の天体望遠鏡を建設中である（通称「すばる望遠鏡」）。マウナケア山頂は、大気の条件が最も観測に適している場所であるが、それでも大気の揺らぎは結像性能に大きく影響を与える。またレーザー光の空間伝搬を利用した光通信やレーザー測距などでも、大気ゆらぎは効率や精度を決める重要な要因になっている。

これらの影響を評価する時に、今まで大気が Kolmogorov 乱流であるとしてきた。乱流中では、ある大きなスケール（外的スケール  $L_o$  と呼ぶ）で媒質に乱流のエネルギーが注入されて大きな乱流渦が発生し、それが小さな渦に崩壊してゆき、最後には粘性によって熱に変わる（このときのスケールを内的スケールと呼ぶ）という過程が起こっている。Kolmogorov 乱流とは、考慮に入れるべきスケールよりも外的スケールが十分大きく、内的スケールが十分小さい場合をいう。今まで外的スケールが 100 m 程度と信じられていて、また望遠鏡の口径も小さかったため Kolmogorov 乱流近似であり問題にはならなかった。ところが最近の気球による温度ゆらぎの測定<sup>1,2)</sup>や、赤外線干渉計

の観測<sup>3)</sup>などから、10 m 程度のスケールでは大気が Kolmogorov 乱流で近似できない時がかなりあることが分ってきた。したがって、8 m クラスの望遠鏡の結像性能を評価するためには、外的スケールが小さい場合の光の伝搬について考える必要がある。

ここでは、屈折率ゆらぎのスペクトルが  $L_o$  の影響を考慮した von Kármán 型の場合について、伝搬光の位相ゆらぎのスペクトルと構造関数を求め、伝搬光の波面を Zernike 多項式で展開したときの展開係数どうしの共分散を計算した。また Kolmogorov 乱流に対して定義されていた大気のコヒーレンス長を、von Kármán 乱流の場合に拡張して、その波長依存性についても考察した。

#### 2. 位相構造関数と位相ゆらぎのパワースペクトル

$L_o$  より大きなスケールでのゆらぎの構造は、例えば大気乱流の場合には地形などによって大きく左右され、一般的には議論できない。ここでは、特殊なケースとして  $L_o$  より大きなスケールでも屈折率ゆらぎは一様等方であると仮定し、(3 次元) パワースペクトルが次式の von Kármán 型で表せるとする。

$$\Phi_n(k) = \frac{A}{(k^2 + k_0^2)^{11/6}} \quad \dots \quad (1)$$

ここで、 $k_0 = 1/L_o$ 、 $A$  は乱流の強さを表す定数である。このスペクトルは  $L_o \rightarrow \infty$  のときに Kolmogorov 乱流の場合に一致する。Fig. 1 に von Kármán スペクトルと Kolmogorov スペクトルの形を示す。

このような媒質を距離  $L$  だけ伝搬した光波 (Fig. 2) の強度と位相の構造関数の和  $D_a(\rho) + D_s(\rho)$  は次式

\* 基礎科学特別研究员（光工学研究室）

\*\* 光工学研究室

\*\*\* 国立天文台

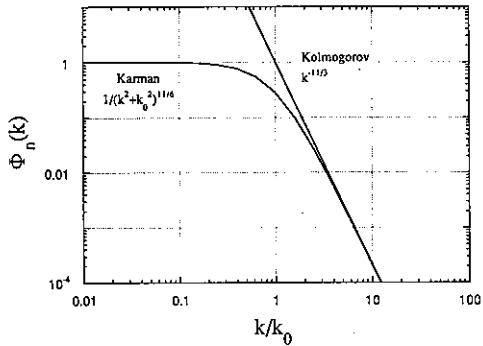


Fig. 1 Shapes of the Kolmogorov and von Kármán spectra.

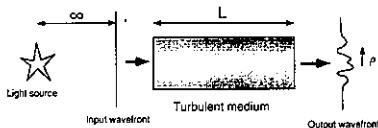


Fig. 2 System geometry and notation.

で表される<sup>4)</sup>。

$$D_a(\rho) + D_s(\rho) = 8 \pi^2 k^2 L \\ \times \int_0^\infty [1 - J_0(2\pi k\rho)] \Phi_n(k) k dk \quad \dots \dots \dots (2)$$

ここで  $k$  は光の波数,  $J_0$  は 0 次のベッセル関数,  $\rho$  は観測面での光波上の 2 点間の距離を表す。我々が特に興味のある大気を伝搬した天体からの光については、 $\rho \gtrsim \sqrt{\lambda L}$ ,  $L_0 \gtrsim \sqrt{\lambda L}$  が成り立っている ( $\lambda = 2 \pi/k$ )。式(1)を式(2)に代入して良く調べると、この場合には  $D_a(\rho)$  は  $D_s(\rho)$  に比べて無視できるくらい小さいことが分かる。従って伝搬光の位相構造関数は

$$D_s(\rho) = \frac{24}{5} \pi^2 k^2 L A k_0^{-5/3} \\ \times \left[ 1 - \frac{2^{1/6}}{\Gamma(5/6)} (2\pi\rho k_0)^{5/6} K_{5/6}(2\pi\rho k_0) \right] \quad \dots \dots \dots (3)$$

となる。ここで  $K_v$  は変形された第 2 種ベッセル関数である。Fig. 3 にこの位相構造関数のグラフを示す。

位相構造関数がわかったので、次に位相ゆらぎのスペクトルを求める。Wiener-Khintchine の定理により (2 次元) 位相ゆらぎスペクトル  $\Phi_s(k)$  と位相構造関数とは

$$D_s(\rho) = 4\pi \int_0^\infty [1 - J_0(2\pi k\rho)] \Phi_s(k) k dk \quad \dots \dots \dots (4)$$

という関係がある。式(2)と式(4)とを比べると

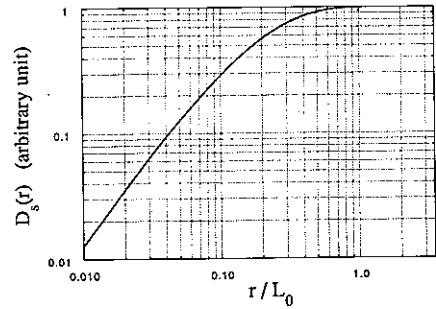


Fig. 3 Phase structure function of von Kármán spectrum.

$$\Phi_s(k) = 2\pi k^2 L \Phi_n(k) = 2\pi k^2 L A \frac{1}{(k^2 + k_0^2)^{11/6}} \quad \dots \dots \dots (5)$$

であることがわかる。 $k_0 \rightarrow 0$  で Kolmogorov 乱流に一致するように定数  $A$  を決めると,

$$\Phi_s(k) = \frac{5 \left[ \frac{24}{5} \Gamma(6/5) \right]^{5/6} k_0^{5/3}}{6\pi \left[ 1 - \frac{2^{1/6}}{\Gamma(5/6)} (2\pi\rho_0 k_0)^{5/6} K_{5/6}(2\pi\rho_0 k_0) \right]} \\ \times \frac{1}{(k^2 + k_0^2)^{11/6}} \quad \dots \dots \dots (6)$$

ここで  $\rho_0$  は大気のコヒーレンス長で、2 点間の位相差の 2 乗平均が  $2 [24/5 \Gamma(6/5)]^{5/6} = 6.88 \text{ rad}^2$  となる距離である。これは  $L_0 \rightarrow \infty$  では Kolmogorov 乱流の場合に一致する。

### 3. 波面の Zernike 展開と展開係数の共分散

光の波面形状を表すのには、しばしば Zernike 多項式  $Z_j(\rho, \theta)$  が用いられる。この関数系は単位円内で直交しており、各多項式はコマ収差や非点収差等の光学収差関数に対応している。Zernike 多項式は次式で定義される。

$$Z_{even,j} = \sqrt{2(n+1)} R_n^m(\rho) \cos m\theta \quad \{ \text{for } m \neq 0 \} \\ Z_{odd,j} = \sqrt{2(n+1)} R_n^m(\rho) \sin m\theta \quad \{ \text{for } m = 0 \}, \\ Z_j = \sqrt{(n+1)} R_n^0(\rho) \quad \dots \dots \dots (7)$$

$$R_n^m(\rho) = \sum_{s=0}^{(n-m)/2} \frac{(-1)^s (n-s)!}{s! [(n+m)/2-s]! [(n-m)/2-s]!} \\ \times \rho^{n-2s} \quad \dots \dots \dots (8)$$

$m$ ,  $n$  と  $j$  との関係は Noll<sup>5)</sup>を参照されたい。

媒質を伝搬した光の波面  $W$  を Zernike 多項式で表わす。

$$W(R\rho, \theta) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i Z_i(\rho, \theta). \quad \dots \dots \dots (9)$$

ここで  $R$  は観測光学系の開口の半径である。このときの展開係数の共分散  $\langle a_i a_j \rangle$  を Noll<sup>5)</sup> の方法で求める。

展開係数  $a_j$  は  $Z_j$  の直交性より  $\rho = (\rho, \theta)$  として

$$a_j = \int d\rho M(\rho) W(R\rho, \theta) Z_j(\rho, \theta). \quad \dots \dots \dots (10)$$

ここで  $M(\rho)$  は  $\rho \leq 1$  でのみ 1, 他では 0 となる窓関数である。これより共分散は

$$\begin{aligned} \langle a_i a_j \rangle &= \int d\rho \int d\rho' M(\rho) M(\rho') Z_i(\rho) \\ &\quad \times C(R(\rho - \rho')) Z_j(\rho'). \quad \dots \dots \dots (11) \end{aligned}$$

ここで  $C(R(\rho - \rho'))$  は次式で定義される位相の共分散である。

$$C(R(\rho - \rho')) = \langle W(R\rho) W(R\rho') \rangle. \quad \dots \dots \dots (12)$$

Parseval の公式, Wiener-Khintchine の定理, convolution 定理を用いると式(11)はフーリエ空間で表せる。

$$\begin{aligned} \langle a_i a_j \rangle &= \int d\rho \left\{ M(\rho) Z_i(\rho) \star C(R\rho) \right\} M(\rho) Z_j(\rho) \\ &= \int d\mathbf{k} \tilde{Z}_i^*(\mathbf{k}) \frac{1}{R^2} \Phi_s\left(\frac{\mathbf{k}}{R}\right) \tilde{Z}_j(\mathbf{k}) \quad \dots \dots \dots (13) \end{aligned}$$

ここで  $\star$  は convolution 演算,  $\tilde{Z}_i$  は  $M(\rho) Z_i(\rho)$  のフーリエ変換,  $*$  は複素共役を表す。

式(13)に式(6)を代入すると,  $\langle a_i a_j \rangle$  は  $m = m'$ かつ  $j, j'$  がともに偶数またはともに奇数の場合のみに 0 でない値をもち,

$$\begin{aligned} \langle a_i a_j \rangle &= (-1)^{\frac{n+n'-2m}{2}} \frac{2c}{\pi} \sqrt{(n+1)(n'+1)} \\ &\quad \int_0^\infty \frac{k^{-1} J_{n+1}(2\pi k) J_{n'+1}(2\pi k)}{[k^2 + (R/L_0)^2]^{1/6}} dk. \quad \dots \dots \dots (14) \end{aligned}$$

ここで

$$c = \frac{5 \left[ \frac{24}{5} \Gamma\left(\frac{6}{5}\right) \right]^{5/6} (R/L_0)^{5/3}}{6\pi \left[ 1 - \frac{2^{1/6}}{\Gamma(5/6)} (2\pi\rho_0/L_0)^{5/6} K_{5/6}(2\pi\rho_0/L_0) \right]} \quad \dots \dots \dots (15)$$

である。

左辺の積分は解析的に計算でき,  ${}_3F_4$  の超幾何関数の和で表される (Takato<sup>6)</sup>)。

#### 4. Kolmogorov 乱流との比較

乱れた波面から Zernike 展開の低次のモードの波面誤差を順に  $J$  モードまで引き去ったときの, 波面の 2 乗誤差  $\Delta_J$  を計算したのが Fig. 4 である。この図には光学系の口径  $D$  と拡張されたコヒーレンス長  $\rho_0$  との比が 10 と 100 の場合について, 外的スケールをいろいろ変えた時の結果を示した。 $L_0/D = \infty$  が Kol-

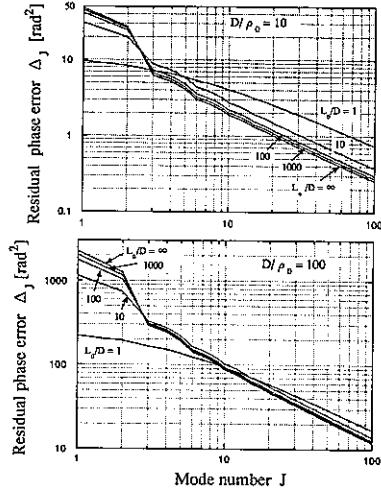


Fig. 4 Residual phase error versus number of correction terms  $J$ . The curves of  $D/L_0 = \infty$  correspond to the Kolmogorov model.

mogorov 乱流の場合に対応している。

当然のことながら, 外的スケールが小さい場合には, 波面乱れの高次のモードが相対的に大きくなっている。見て分かるとおり, 外的スケールが小さい影響は低次のモードで顕著で, 外的スケールが口径の 10 倍あっても Kolmogorov 乱流との違いは 2 倍近くにもなる。拡張されたコヒーレンス長  $\rho_0$  は, 光の波長が長くなればなるほど大きくなる。Kolmogorov 乱流の場合には  $\lambda^{6/5}$  に比例して大きくなるが, von Kármán 乱流の場合には大きくなり方がもっと速く,

$$\rho_0 \propto F^{-1}(\lambda) \quad \dots \dots \dots (16)$$

$$F(\rho_0) = L_0^{5/6} \left[ 1 - \frac{2^{1/6}}{\Gamma(5/6)} (2\pi\rho_0/L_0)^{5/6} K_{5/6}(2\pi\rho_0/L_0) \right]^{1/2}$$

である。 $F(\rho)$  の関数形は位相構造関数 (Fig. 3) の平方根である。

#### 5. おわりに

乱れの外的スケールが有限の値をもち, 屈折率ゆらぎのスペクトルが von Kármán 型で表される媒質中の光の伝搬について考察した。伝搬光を Zernike 展開したときの展開係数の共分散を計算し, Kolmogorov 乱流の場合と比較した。今までのところ, 統計的にしっかりした  $L_0$  の値の測定は, ほとんどなされていない。ここで行った計算は大気擾乱の測定から,  $L_0$  を導

出する際に使われる他、大口径地上望遠鏡の光学性能の評価や、補償光学系の設計、レーザービームの伝搬の解析の基礎となるものである。

#### 参考文献

- 1) Coulman, C.E., Vernin, J., Coqueugniot, Y., and Caccia, J.L.: *Appl. Opt.*, **27**, 155 (1988).
- 2) Bester, M., Danchi, W.C., Degiacomi, C.G., Greenhill, L.J., and Townes, C.H.: in "Adaptive Optics for Large Telescopes Technical Digest," (Optical Society of America, Washington, D.C., 1992), p. 19 (1992).
- 3) Mariotti, J.M. and Di Benedetto, G.P.: I.A.U. Colloq., p. 79 (1984).
- 4) Tatarski, V.I.: *Wave Propagation in a Turbulent Medium*, McGraw-Hill, New York (1961).
- 5) Noll, R.J.: *J. Opt. Soc. Am.*, **66**, 207 (1976).
- 6) Takato, N.: Doctor thesis, Faculty of Science, Univ. Tokyo (1993).